DJM

AG7

CAPES externe 1978, 2e composition

PROBLEME :

1° Si F et G sont deux parties d'un ensemble E, F\G désigne l'ensemble des éléments de F n'appartenant pas à G.

$\mathbf{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs, $\mathbf{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

E_2 est un plan affine euclidien, $\mathscr{E}_2$ son espace vectoriel associé.

La norme euclidienne de $\mathscr{E}_2$ permet de munir E_2 de sa structure canonique d'espace métrique $d(A, B) = \|\mathbf{AB}\|$.

Si A et B sont deux points distincts de E_2, le segment d'extrémités A et B est l'ensemble des points M de E_2 tels qu'il existe $t \in [0, 1]$ vérifiant $\mathbf{AM} = t\mathbf{AB}$. On le note [A, B].

Si $O \in E_2$ et $\rho \in \mathbf{R}_+^*$ on appelle

cercle de centre O et de rayon ρ l'ensemble $\{M \in E_2 / d(O, M) = \rho\}$;
disque fermé de centre O et rayon ρ l'ensemble $\{M \in E_2 / d(O, M) \leqslant \rho\}$;
disque ouvert de centre O et de rayon ρ l'ensemble $\{M \in E_2 / d(O, M) < \rho\}$.

Un demi-cercle d'extrémités A et B est l'intersection du cercle de diamètre [A, B] avec l'un des demi-plans fermés délimités par la droite (A, B).

— 2° Dans tout le problème Γ *est une partie non vide de* E_2.

Si M est un point de E_2, la distance de M à Γ est la borne inférieure, notée $d(M, \Gamma)$, de l'ensemble $\{d(M, P)/P \in \Gamma\}$. Par exemple (résultat admis) si Γ est une droite et si H est la projection orthogonale de M sur Γ, $d(M, \Gamma) = d(M, H)$.

Si M est un point de E_2 et s'il existe un point P de Γ tel que $d(M, \Gamma) = d(M, P)$, P est appelé projection de M sur Γ. On note $p(M)$ l'ensemble des projections de M sur Γ [$p(M)$ peut être vide].

On appelle relèvement d'un point P de Γ, tout point M de E_2 tel que $P \in p(M)$. On note $r(P)$ l'ensemble des relèvements de P.

Si Γ' est une partie non vide de Γ on note $r(\Gamma')$ la réunion des ensembles $r(P)$ lorsque P décrit Γ'.

Si M est un point du relèvement d'un point P de Γ et si $d(M, P) = k, k \in \mathbf{R}_+^*$, on dit que M est un k-relèvement de P et l'on note $r_k(P)$ l'ensemble des k-relèvements de P et $r_k(\Gamma')$ la réunion des $r_k(P)$ lorsque P décrit Γ'.

On appelle k-sphère d'hypercentre Γ l'ensemble $\{M \in E_2 / d(M, \Gamma) = k\}$.

N.B. — Les raisonnements seront illustrés par des figures; celles-ci ne sauraient dispenser des démonstrations. Les dessins seront effectués directement sur la copie en regard du texte de la démonstration correspondante, exception faite des deux figures qui sont expressément demandées sur papier millimétrique.

I

Dans cette partie les ensembles déterminés seront tous représentés par des figures précises.

I. — 1° Dans cette question Γ est le cercle de centre O et de rayon $\rho \in \mathbf{R}_+^*$.

a) Déterminer $p(M)$ pour tout point M de E_2. Pour tout point P de Γ, déterminer $r(P)$, puis $r_k(P)$.

b) Déterminer la k-sphère d'hypercentre Γ et la comparer à $r_k(\Gamma)$.

c) Si Γ_1 et Γ_2 sont deux cercles de centres distincts et de rayons distincts, déterminer l'ensemble des points équidistants de ces deux cercles : $\{M \in E_2 / d(M, \Gamma_1) = d(M, \Gamma_2)\}$. On discutera suivant la position relative de ces deux cercles.

I. — 2° Reprendre les questions I, 1°, *a*) et I, 1°, *b*) dans les deux cas suivants :

(i) Γ est le disque fermé de centre O et de rayon ρ;

(ii) Γ est le disque ouvert de centre O et de rayon ρ.

I. — 3° *a*) Reprendre les questions I, 1°, *a*) et I, 1°, *b*) lorsque Γ est un segment [A, B]. On commencera par déterminer $r(A)$, $r(B)$ et $r(\Gamma \backslash \{A, B\})$.

b) Déterminer l'ensemble des points équidistants des deux segments diagonaux d'un losange. On construira très précisément cet ensemble sur papier millimétrique, dans le cas de deux segments de longueurs respectives 2 cm et 8 cm, la petite diagonale du losange étant placée sur le grand axe de la feuille.

I. — 4° *a*) Reprendre les questions I, 1, *a*) et I, 1, *b*) lorsque Γ est un demi-cercle d'extrémités A et B (on pourra utiliser les résultats du I, 1° et s'inspirer de la méthode utilisée dans I, 3°, *a*).

b) Étant donné un triangle équilatéral de sommets A, B et C, on considère le demi-cercle (Γ_1) d'extrémités A et B ne contenant pas le milieu de [A, C] et le demi-cercle (Γ_2) symétrique de (Γ_1) par rapport à la médiatrice de [B, C]. Trouver l'ensemble des points équidistants de (Γ_1) et de (Γ_2).

.../...

II

Dans cette partie $\mathscr{E}_2$ et E_2 sont supposés orientés, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct de E_2.

II. – 1° $\mathscr{J}$ désigne un intervalle ouvert de R (borné ou non) et f une application continûment dérivable de $\mathscr{J}$ dans $\mathscr{E}_2$ telle que la dérivée f' ne s'annule en aucun point de $\mathscr{J}$. On considère l'arc géométrique orienté (φ) de représentation paramétrique $(\mathscr{J}, f)$. Soit $(\vec{t}(u), \vec{n}(u))$ le repère de Frenet correspondant à l'orientation de (φ) au point de paramètre u de (φ). Montrer, pour tout réel λ la continuité de la fonction f_λ de $\mathscr{J}$ dans $\mathscr{E}_2$ définie par

$$\forall u \in \mathscr{J}, \qquad f_\lambda(u) = f(u) + \lambda \vec{n}(u).$$

On appellera (φ_λ) l'arc géométrique de représentation paramétrique $(\mathscr{J}, f_\lambda)$.

On désigne par Φ (resp. Φ_λ) l'ensemble des points M de E_2 définis par $\overrightarrow{OM} = f(u)$ (resp. $\overrightarrow{OM} = f_\lambda(u)$) lorsque u décrit $\mathscr{J}$.

II. – 2° Montrer que $r_k(\Phi) \subset \Phi_k \cup \Phi_{-k}$.

II. – 3° On se place dans le cas où $\mathscr{J} = \mathbf{R}_+^*$ et $f(u) = 2au(u\vec{i} + \vec{j})$, a étant un nombre réel strictement positif donné. Étudier suivant les valeurs de λ l'arc (φ_λ) associé à l'arc (φ).

On construira Φ et les quatre Φ_λ correspondant aux quatre valeurs de λ; $+a$, $-a$, $2a\sqrt{2}$ et $-2a\sqrt{2}$. On fera ce dessin sur une feuille de papier millimétrique : $(O, \vec{i})$ est porté par le grand axe de la feuille et est dirigé vers le bas, O est à 8 cm du bord supérieur de la partie millimétrée, $(O, \vec{j})$ est dirigé vers la droite. On prend $a = 1$ et l'unité égale à 2 cm.

II. – 4° (Γ) étant la parabole contenant l'ensemble de Φ construit au II, 3°.

a) Déterminer $r(P)$ pour un point P de (Γ).

b) Déterminer $r_k(P)$, puis $r_k(\Gamma)$, $k \in \mathbf{R}_+$.

On pourra, soit compléter la figure du II, 3° en utilisant une couleur différente, soit faire un dessin à main levée sur la copie.

III

On admettra que si (Γ) est une partie fermée, non vide, de E_2 pour tout point M de E_2, $p(M)$ est non vide.

On dit que (Γ) est convexe si, quels que soient deux points A et B de (Γ), tout point P de [A, B] appartient à (Γ).

La frontière de (Γ) est l'ensemble des points adhérents simultanément à (Γ) et à son complémentaire dans E_2.

III. – 1° Montrer que si (Γ) est convexe, $p(M)$ a au plus un élément.

III. – 2° Si P est un point de E_2, on appelle demi-cône de sommet P et de directrice (Γ) la réunion $\mathscr{C}(P, \Gamma)$ des demi-droites fermées, d'origine P, contenant au moins un point de (Γ) distinct de P.

a) Montrer que si (Γ) est convexe, pour tout point P de E_2, $\mathscr{C}(P, \Gamma)$ est convexe.

b) Montrer que tout demi-cône convexe $\mathscr{C}$, distinct de E_2, est inclus dans au moins un demi-plan dont la frontière contient le sommet de $\mathscr{C}$.

c) Montrer que l'intersection de deux demi-plans est en général un demi-cône convexe. Énoncer et démontrer une réciproque.

III. – 3° Montrer que si (Γ) est convexe et P non intérieur à (Γ), $\mathscr{C}(P, \Gamma)$ est inclus dans au moins un demi-plan dont la frontière (D) contient P.

Si P appartient à la frontière de (Γ), toute droite (D) frontière d'un tel demi-plan est appelée droite d'appui de (Γ) passant par P. S'il passe par P au moins deux droites d'appui de (Γ) on dit que P est un coin de (Γ).

III. – 4° (Γ) étant une partie fermée convexe de E_2

a) déterminer $r(P)$ pour un point P de la frontière de (Γ).

b) donner une description de la k-sphère d'hypercentre (Γ).

Solution de la RMS

AG7

c'est-à-dire diam B $\leqslant$ diam A, alors que

$$A \subset B \quad \text{implique} \quad \text{diam } A \leqslant \text{diam } B;$$

■ $(y, z) \in C^2 \Rightarrow y = \lim_n u_n,\ z = \lim_n v_n,\ (u_n, v_n) \in B^2$, d'où

$$\|y - z\| = \|\lim_n (u_n - v_n)\| = \lim_n \|u_n - v_n\| \leqslant \delta,$$

c'est-à-dire diam C $\leqslant$ diam B, alors que

$$B \subset C \quad \text{implique} \quad \text{diam } B \leqslant \text{diam } C.$$

Par suite, δ_i est le diamètre de C_i et

$$\left\| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)\mu_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x) - \mu_i]\,dx \right\|$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \|f(x) - \mu_i\|\,dx \leqslant \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)\,\delta_i = \Delta(\sigma).$$

e) 4. $\Rightarrow$ 5. : Immédiat car $A_i \subset C_i$.

Nous avons ainsi démontré les parties *a*), *b*) et *d*) du théorème.

III. – Cas particulier E = R. – Il suffit de prouver que 5. $\Rightarrow$ 1.

En notant $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$ pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$, il est clair que $\delta_i = M_i - m_i$, d'où $\Delta_k = S_k - s_k$, avec

$$S_k = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)M_i,$$

$$s_k = \sum_{i=0}^{m-1} (x_{i+1} - x_i)m_i \quad \textbf{(sommes de Darboux)}.$$

En choisissant $(\xi_i, \eta_i) \in [x_i, x_{i+1}]^2$ tels que

$$m_i \leqslant f(\xi_i) \leqslant m_i + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}, \qquad M_i - \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \leqslant f(\eta_i) \leqslant M_i,$$

on définit deux sommes de Riemann Σ_1 et Σ_2 telles que

$$|\Sigma_1 - s_k| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |\Sigma_2 - S_k| < \frac{\varepsilon}{3},$$

d'où $|S_k - s_k| < \dfrac{2\varepsilon}{3} + |\Sigma_1 - \Sigma_2| < \varepsilon$ pour k assez grand.

IV. Deux applications.

1° Soit F un espace de Banach, g une application de $f([a, b])$ dans F. Si f est intégrable et g lipschitzienne, alors $g \circ f$ est intégrable car, si ρ est tel que

$$\|f(u) - f(v)\| \leqslant \delta_i \Rightarrow \|g \circ f(u) - g \circ f(v)\| \leqslant \rho\,\delta_i,$$

l'indicateur de Darboux de $g \circ f$ est majoré par $\rho\Delta(\sigma)$.

En particulier, si E = **R** et si $|f(x)| \geqslant m > 0$ pour tout $x \in [a, b]$, $\dfrac{1}{f}$ est intégrable $\left(\text{prendre } \rho = \dfrac{1}{m^2}\right)$.

(Remarque. – Le théorème de Lebesgue montre qu'en fait la continuité et le caractère borné de g suffisent pour que $g \circ f$ soit intégrable.)

2° On sait que le théorème des accroissements finis

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

ne s'étend pas à des fonctions vectorielles; la bonne généralisation est la suivante (*cf.* Chambadal et Ovaert, Analyse II, p. 121, Gauthier-Villars) :

$$\frac{1}{b-a}[f(b) - f(a)]$$

appartient à l'adhérence de la fermeture convexe de $f'([a, b])$. Il en résulte presque immédiatement que, pour toute fonction f de dérivée intégrable, $f(b) - f(a)$ est une somme de Riemann de deuxième espèce de l'intégrale $\int_a^b f'(t)\,dt$, d'où l'égalité

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt.$$

C.A.P.E.S.

Concours de 1978.

Deuxième composition de mathématiques.

6204. Énoncé résumé : **Projection d'un point d'un plan affine euclidien sur une partie de ce plan. Relèvement d'un point. Distances à des ensembles ponctuels simples. Points à une distance donnée d'un ensemble. Courbes parallèles. Droites d'appui d'une partie convexe fermée. Points à une distance donnée d'un convexe fermé.**

(Voir l'énoncé complet dans la *Revue*, n° 1, page 10.)

Première partie.

I. – 1° *a*) $p(0) = \Gamma$; si $M \neq 0$, $p(M)$ est le point d'intersection de Γ et de la demi-droite d'origine O contenant M, comme on le voit en étudiant

$$f(\theta) = (x - \rho\cos\theta)^2 + \rho^2 \sin^2\theta$$

(x : abscisse de M sur OM); $r(P)$ est donc une demi-droite fermée d'origine O; $r_k(P)$ est formé d'un point si $k > \rho$, de deux si $k \leqslant \rho$ car $d(M, \Gamma) = |x - \rho|$.

b) Si $k > \rho$, la k-sphère est le cercle $C(0, k + \rho)$; si $k \leqslant \rho$, c'est la réunion des cercles

$$C(0, k + \rho) \cup C(0, \rho - k);$$

c'est $r_k(\Gamma)$.

c) Supposons, par exemple, $\rho_2 > \rho_1$; appelons F_1 (resp. F_2) le centre de Γ_1 (resp. Γ_2), de coordonnées $(c, 0)$ (resp. $(-c, 0)$), avec $c > 0$. Posons $d = 2c > 0$,

$$u = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} > 0, \qquad v = \frac{\rho_2 + \rho_1}{2}, \qquad r_1 = d(M, F_1), \qquad r_2 = d(M, F_2).$$

Appelons H la branche d'hyperbole définie par $r_2 - r_1 = 2u$, E l'ellipse définie par $r_1 + r_2 = 2v$; H est vide si, et seulement si, $d < \rho_2 - \rho_1$; si $d = \rho_2 - \rho_1$, H est une demi-droite; E est vide si, et seulement si, $d > \rho_2 + \rho_1$.

Si $d = \rho_2 + \rho_1$, E est un segment. Le lieu cherché s'écrit, avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$

$$|r_1 - \rho_1| = |r_2 - \rho_2|,$$

c'est-à-dire $r_2 - \varepsilon r_1 = \rho_2 - \varepsilon\rho_1 \in \{2u, 2v\}$; c'est donc H $\cup$ E, c'est-à-dire

– si $d > \rho_2 + \rho_1$: une branche d'hyperbole (*fig.* 1);

– si $d = \rho_2 + \rho_1$: une branche tangente aux deux cercles en leur point commun, unie au segment joignant leurs centres (*fig.* 2);

– si $\rho_2 - \rho_1 < d < \rho_2 + \rho_1$: une branche d'hyperbole et une ellipse se coupant aux points communs aux deux cercles (*fig.* 3);

– si $d = \rho_2 - \rho_1$: une ellipse unie à une demi-droite (*fig.* 4);

– si $d < \rho_2 - \rho_1$: une ellipse (*fig* 5).

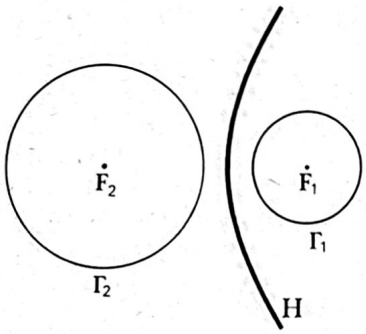

FIG. 1.

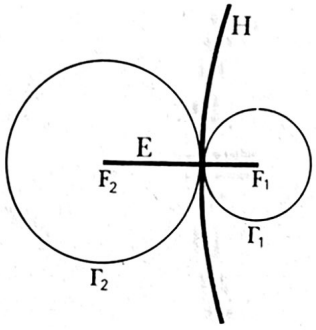

FIG. 2.

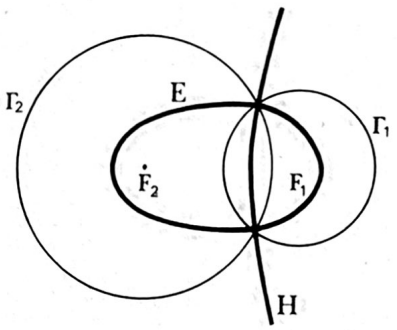

FIG. 3.

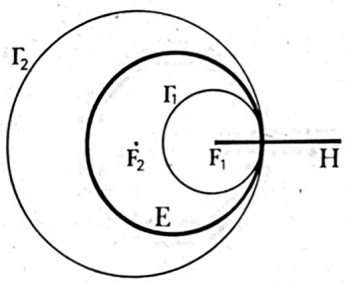

FIG. 4.

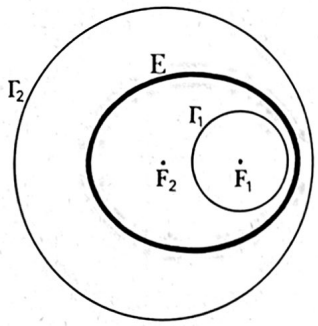

FIG. 5.

I. – **2°** ***a***) Si $\Gamma = \bar{D}(O, \rho)$, $p(M) = M$ pour tout $M \in \Gamma$; si $M \notin \Gamma$, $p(M)$ est le point commun à la demi-droite OM et au cercle $C(O, \rho)$. Si $\overline{P}$ est intérieur à Γ, $r(P) = \{P\}$; si P est sur la frontière de Γ, $r(P)$ est une demi-droite fermée d'origine P, ne contenant pas O et incluse dans la droite OP; si P est intérieur, $r_k(P)$ est vide; si P est sur la frontière, $r_k(P)$ est un singleton. La k-sphère est, ici encore, égale à $r_k(\Gamma)$: c'est le cercle $C(O, k + \rho)$.

b) Si $\Gamma = D(O, \rho)$, $p(M) = M$ si $M \in \Gamma$, $p(M) = \varnothing$ si $M \notin \Gamma$; $r(P) = \{P\}$, car tout point P est intérieur; $r_k(P) = \varnothing$. La k-sphère est, ici encore, $C(O, k + \rho)$, mais $r_k(\Gamma) = \varnothing$.

I. – **3°** ***a***) Appelons $((-c, 0), (c, 0))$ les coordonnées de A et B, pour $A \neq B$ et $c > 0$ (le cas $A = B$ est bien connu). Alors $r(A)$ est l'ensemble des points d'abscisse $x \leqslant -c$, $r(B)$ celui des points d'abscisse $x \geqslant c$, comme on le voit en étudiant $(x - \lambda)^2 + y^2$, $|\lambda| \leqslant c$; enfin $r(]A, B[)$ est l'ensemble des points d'abscisse $x \in]-c, c[$. Ceci donne $p(M)$ (projection orthogonale de M si $|x| \leqslant c$, sinon A ou B suivant les cas) $r(P)$ (demi-plans fermés si $P = A$, $P = B$, droite

perpendiculaire à AB si $P \in]A, B[$ et $r_k(P)$ (demi-cercles si $P = A$, $P = B$, paire de points symétriques par rapport à $]A, B[$ sinon).

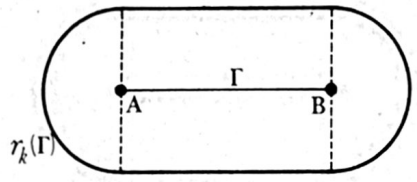

FIG. 6.

La k-sphère est confondue avec $r_k(\Gamma)$: c'est la réunion de deux demi-cercles et de deux segments (*fig.* 6).

b) Prenons les quatre points $A(a, 0)$, $B(0, b)$, $C(-a, 0)$ et $D(0, -b)$, avec $a > 0, b > 0$ et étudions le quadrant $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Pour $M(x, y)$, on a

$$d^2(M, [A, C]) = y^2 \quad \text{si} \quad x \leqslant a, \quad (x-a)^2 + y^2 \quad \text{si} \quad x \geqslant a,$$
$$d^2(M, [B, D]) = x^2 \quad \text{si} \quad y \leqslant b, \quad x^2 + (y-b)^2 \quad \text{si} \quad y \geqslant b.$$

Posons, par exemple, $a \geqslant b$ et séparons les cas :

- $x \leqslant a$, $y \leqslant b$: $y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x$, $x \in [a, b]$;
- $x \leqslant a$, $y \geqslant b$: $y^2 = x^2 + (y-b)^2 \Leftrightarrow 2by = x^2 + b^2$, $x \in [b, a]$;
- $x \geqslant a$, $y \geqslant b$: $(x-a)^2 + y^2 = x^2 + (y-b)^2 \Leftrightarrow 2(by - ax) = b^2 - a^2$, $x \in [a, +\infty[$;
- $x \geqslant a$, $y \leqslant b$: $(x-a)^2 + y^2 = x^2 \Leftrightarrow 2ax = y^2 + a^2$, ce qui est impossible (sauf pour $x = y = a = b$) (*fig.* 7).

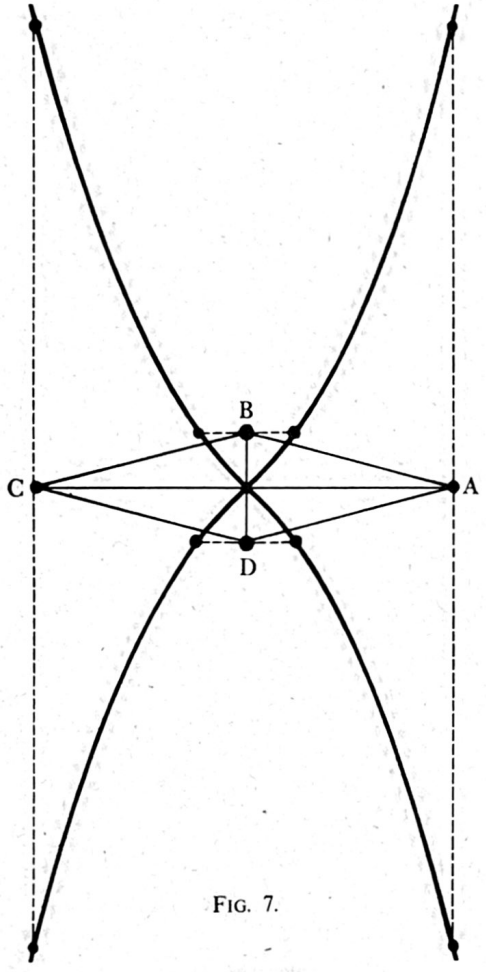

FIG. 7.

Dans ce quadrant, l'ensemble cherché est donc réunion d'un segment, d'un arc de parabole (ce qui est alors géométriquement évident : le foyer en est B, la directrice AC) et d'une demi-droite; le raccordement est de classe C^1. Le cas $a = b$ (carré) est particulièrement simple, l'ensemble est alors formé des deux bissectrices des diagonales.

I. – 4° ***a***) Ici encore, nous supposerons $A \neq B$, en notant $(a, 0)$, $(-a, 0)$ les coordonnées de A et B, avec $a > 0$. Discutons suivant le signe de y :

- $y \geqslant 0$: si $M = 0$, alors $p(M) = \Gamma$. Sinon $p(M)$ est un singleton, intersection de Γ et de la demi-droite OM d'origine O (*cf.* I. – 1°);
- $y < 0$: supposons $x \geqslant 0$. On a

$$d^2(M, P) = (x - a\cos\theta)^2 + (y - a\sin\theta)^2$$
$$= x^2 + y^2 + a^2 - 2a(x\cos\theta + y\sin\theta),$$

avec $\theta \in [0, \pi]$, d'où

$$d^2(M, P) - [(x-a)^2 + y^2] = 2a[x(1 - \cos\theta) - y\sin\theta] \geqslant 0;$$

avec égalité pour $\theta = 0$ (et $\theta = \pi$, dans le seul cas $x = 0$). Donc

$$p(M) = \{A\} \quad \text{si} \quad x > 0, \quad p(M) = \{A, B\} \quad \text{si} \quad x = 0$$

et

$$p(M) = \{B\} \quad \text{si} \quad x < 0.$$

Si $P \in \Gamma - \{A, B\}$, $r(P)$ est une demi-droite fermée d'origine O, et $r_k(P)$ est un singleton, on a une paire comme au I. – 1°; $r(A)$ est un quart de plan fermé ($x \geqslant 0 \geqslant y$), $r_k(A)$ est l'intersection de ce quart de plan avec le cercle $C(A, k)$ (c'est donc un arc de ce cercle, au maximum un demi-cercle). La k-sphère, égale à $r_k(\Gamma)$, est formée de la réunion de trois ou quatre arcs de cercle, suivant le cas (figures 8, 9 et 10).

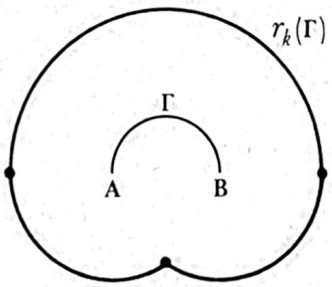

FIG. 8.

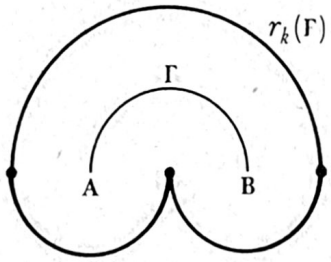

FIG. 9.

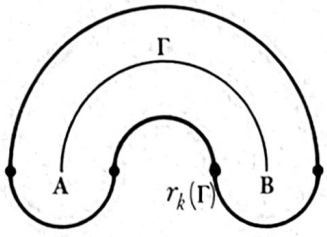

FIG. 10.

b) Nous distinguerons, à la suite du *a*), quatre régions dans E_2 (voir la figure 11), et étudierons les régions (I, II, III). Soit $2a$ la longueur de [B, C]. Posons B_1, C_1, milieux de [A, C], [A, B],

$$\beta = d(B_1, M), \quad \gamma = d(C_1, M), \quad \alpha = d(A, M), \quad d_i = d(M, \Gamma_i) \quad (1 \leqslant i \leqslant 2).$$

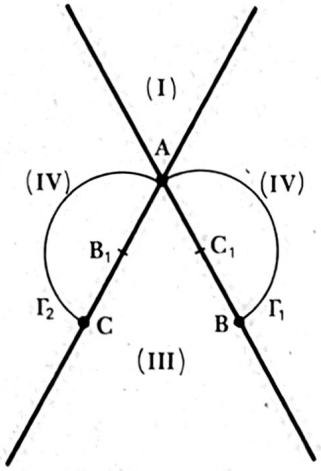

FIG. 11.

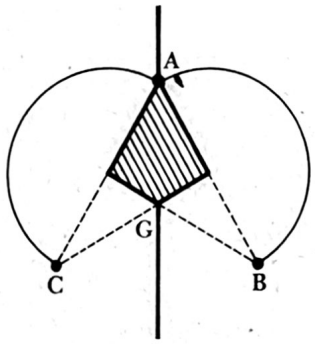

FIG. 12.

■ Région I : $d_1 = |\gamma - a|$, $d_2 = |\beta - a|$; $d_1 = d_2$ équivaut à $\gamma - a = \varepsilon(\beta - a)$, c'est-à-dire $\gamma - \varepsilon\beta \in \{0, 2a\}$. On obtient donc une demi-droite définie par $(\gamma = \beta)$, c'est-à-dire la partie de la médiatrice de [B, C] située dans I, car la relation $\gamma + \beta = 2a$ est exclue pour $M \neq A$, l'ellipse qu'elle définit, de foyers B_1 et C_1, admettant justement A comme sommet.

■ Région II : $d_1 = |\gamma - a|, d_2 = \alpha; d_1 = d_2$ équivaut à $\gamma - a = \varepsilon\alpha$, ou encore à $\gamma = \alpha + a$ (demi-droite d'origine A, de support AB, ne contenant pas B, dont seul le point A est dans II), on a $\gamma = a - \alpha$ (segment $[A, C_1]$).

■ Région III : soit G le centre de gravité du triangle. Il définit un sous-régionnement de III en quatre parties (*fig.* 12), où les distances d_1 et d_2 sont égales à α, ou à $d(M, B)$, ou à $d(M, C)$. Seule la partie constituée de AC_1GB_1 (intérieur compris) et la partie de la médiatrice de [B, C] d'origine G et ne contenant pas A appartient à l'ensemble cherché.

DEUXIÈME PARTIE.

II. – 1° $\boldsymbol{t} = \dfrac{d\mathbf{M}}{ds} = \dfrac{\boldsymbol{f}'(u)}{\|\boldsymbol{f}'(u)\|}$, $\boldsymbol{n} = \rho(\boldsymbol{t})$, où ρ est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$; comme $u \longmapsto \boldsymbol{t}$ est continue, il en est de même de $u \longmapsto \boldsymbol{n}$ et de $u \longmapsto \boldsymbol{f}(u) + \lambda\boldsymbol{n}(u) = \boldsymbol{f}_\lambda(u)$.

II. – 2° Soit $M \in r_k(\Phi)$: il existe $u \in \mathscr{I}$, $P = \overrightarrow{f(u)} \in \Phi$, tel que $\|\mathbf{MP}\| = k$ et que, pour tout $v \in \mathscr{I}$, $\mathbf{Q} = \boldsymbol{f}(v)$ implique $\|\mathbf{MQ}\| \geqslant k$. Posons $F(v) = \|\boldsymbol{f}(v) - M\|^2 = \|\mathbf{MQ}\|^2$: il existe

$$\frac{dF}{dv} = 2(\boldsymbol{f}'(v) \mid \boldsymbol{f}(v) - M).$$

Comme $F(u)$ est un minimum pour F, on sait qu'alors $F'(u) = 0$, d'où l'orthogonalité de

$$\boldsymbol{f}(u) - M = \mathbf{MP} \qquad \text{et de} \qquad \boldsymbol{f}'(u) = \|\boldsymbol{f}'(u)\|\boldsymbol{t},$$

d'où encore une relation du type $\mathbf{MP} = \lambda\boldsymbol{n}$. Or $\|\mathbf{MP}\| = |\lambda| = k$, par suite,

$$\lambda \in \{-k, k\} \qquad \text{et} \qquad M \in \Phi_k \cup \Phi_{-k}.$$

(Ce résultat serait inexact pour un intervalle non ouvert : considérer, par exemple, un segment [0, 1] et utiliser le I. – 3° *a*).)

II. – 3° *a*) Posons $\theta = \operatorname{Arc\,tg} 2u \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\mu = \dfrac{\lambda}{a}$; il vient

$$\boldsymbol{f}(u) = (2au^2, 2au) = \left(\frac{a}{2}\operatorname{tg}^2\theta,\ a\operatorname{tg}\theta\right), \qquad \boldsymbol{f}'(u) = (4au, 2a),$$

$$\|f'(u)\| = 2a\sqrt{1+4u^2} = \frac{2a}{\cos\theta},\quad t(u) = (\sin\theta, \cos\theta),\qquad n(u) = (-\cos\theta, \sin\theta).$$

Si $f_\lambda(u) = (aX, aY)$, il vient

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta - \mu\cos\theta, & \dfrac{dX}{d\theta} = (1+\mu\cos^3\theta)\dfrac{\operatorname{tg}\theta}{\cos^2\theta}, \\ Y = \operatorname{tg}\theta + \mu\sin\theta, & \dfrac{dY}{d\theta} = (1+\mu\cos^3\theta)\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\theta}\dfrac{dX}{d\theta}. \end{cases}$$

b) $\lim\limits_{\theta\uparrow\frac{\pi}{2}} \dfrac{Y}{X} = \lim\limits_{\theta\uparrow\frac{\pi}{2}} \dfrac{2\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}^2\theta} = 0$: branche parabolique dans la direction de Ox.

$$\lim_{\theta\downarrow 0}\frac{Y}{X+\mu} = \lim_{\theta\downarrow 0}\frac{2(\operatorname{tg}\theta + \mu\sin\theta)}{\operatorname{tg}^2\theta + 4\mu\sin^2\dfrac{\theta}{2}}.$$

On obtient facilement l'équivalent $\dfrac{2}{\theta}$ si $\mu \neq -1$, d'où une tangente parallèle à Oy au point $(-\mu, 0)$ dans ce cas, et $\dfrac{4}{3\theta}$ si $\mu = -1$ (même conclusion).

c) Soit $\mu \geqslant -1$: les variations sont alors immédiates, car $1 + \mu\cos^3\theta \geqslant 1 - \cos^3\theta \geqslant 0$ (par exemple, pour $\mu = 0$, on trouve une demi-parabole Φ). Posons désormais $\mu < -1$, $\omega = -\mu^{-\frac{1}{3}} \in]0, 1[$, $\alpha = \operatorname{Arc}\cos\omega \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Il existe alors un point stationnaire, obtenu pour $\theta = \alpha$. Alors

$$\cos\alpha = \omega,\qquad \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\omega^2}{\omega^2},\qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\omega^2},\qquad \mu = -\frac{1}{\omega^3} = -\frac{1}{\cos^3\alpha};$$

$$X(\alpha) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{3-\omega^2}{2\omega^2},\qquad Y(\alpha) = \operatorname{tg}\alpha\left[1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right] = -\operatorname{tg}^3\alpha.$$

En un point autre que le point stationnaire, la pente de la tangente est $m = \dfrac{dY}{dX} = \operatorname{cotg}\theta$. Montrons que ce point est un point de rebroussement de seconde espèce : le calcul donne

$$X'' = \frac{3 - 2\cos^2\theta}{\cos^4\theta} + \mu\cos\theta,\qquad X''(\alpha) = \frac{3\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha},$$

$$Y'' = \frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta} - \mu\sin\theta,\qquad Y''(\alpha) = \frac{3\sin\alpha}{\cos^3\alpha} = X''(\alpha)\operatorname{cotg}\alpha,$$

ce qui donne la pente de la tangente en ce point; comme celle-ci est continue et que la valeur de $\operatorname{cotg}\alpha$ n'est pas un extrémum local, c'est donc que le rebroussement est de première espèce. Le calcul redonnerait ceci, en montrant que $X''(\alpha)Y'''(\alpha) - Y''(\alpha)X'''(\alpha) \neq 0$, on trouve

$$X'''(\alpha) = \frac{(7+5\sin^2\alpha)\sin\alpha}{\cos^5\alpha},\quad Y'''(\alpha) = \frac{3(1+\sin^2\alpha)}{\cos^4\alpha},\quad X''Y''' - X'''Y'' = -6\frac{\sin^2\alpha(1+2\sin^2\alpha)}{\cos^8\alpha}.$$

Le tracé est alors immédiat. Le cas intéressant est celui de $\lambda = -2a\sqrt{2}$, soit $\mu = -2\sqrt{2}$, $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, d'où $X(\alpha) = \dfrac{5}{2}$, $Y(\alpha) = -1$, $\operatorname{cotg}\alpha = 1$.

L'intersection avec l'axe Ox est obtenue pour $\theta = \operatorname{Arc}\cos\left(-\dfrac{1}{\mu}\right) = \operatorname{Arc}\cos\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ (*fig.* 13).

(REMARQUE. – Les courbes Φ_λ sont dites parallèles à Φ; il n'y a de rebroussement qu'à partir de $\lambda = -a$, rayon de courbure minimum (au sommet) pour Φ.

Les points stationnaires décrivent la courbe définie par $27Y^2 = 8(X-1)^3$, développée de Φ.)

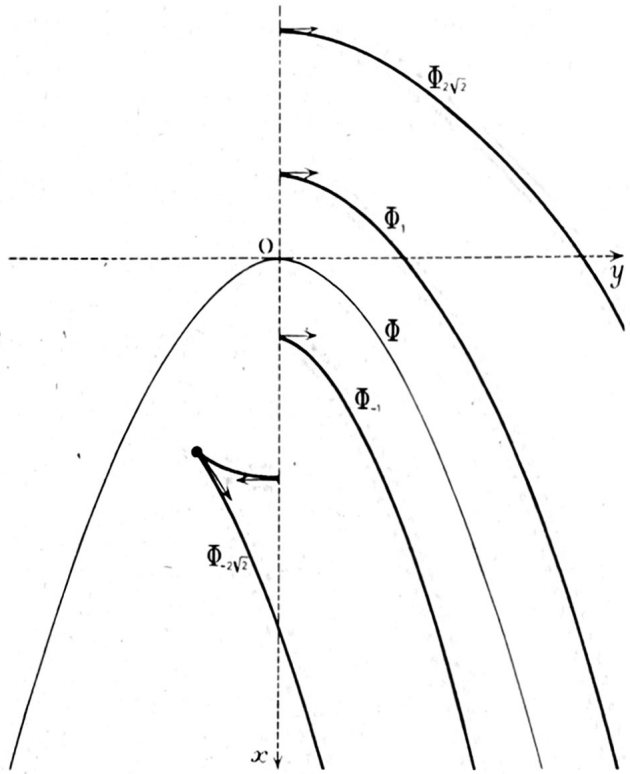

FIG. 13.

II. – 4° *a*) Γ est définie par $x = 2au^2$, $y = 2au$ pour $u \in \mathbf{R}$.

D'après le 2°, $r(P)$ est inclus dans la normale en P. Avec nos notations précédentes, un point de cette normale a pour coordonnées

$$\left[a\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta - \mu\cos\theta\right), \quad a(\operatorname{tg}\theta + \mu\sin\theta)\right].$$

Pour que $p(M) \ni P$, il est nécessaire et suffisant que, pour tout $\varphi \in \mathbf{R}$, et $Q = f(\varphi)$, on ait $\|\mathbf{MQ}\| \geqslant \|\mathbf{MP}\| = |\lambda| = a|\mu|$. Posons

$$v = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi = h + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta = h + u;$$

il faut donc vérifier que, pour tout $h \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \frac{1}{4a^2}[\|\mathbf{MQ}\|^2 - \lambda^2] &= \frac{1}{4a^2}[(2a[v^2 - u^2] + \lambda\cos\theta)^2 + (2a[v-u] - \lambda\sin\theta)^2 - \lambda^2] \\
&= (v^2-u^2)^2 + (v-u)^2 + \mu[(v^2-u^2)\cos\theta - (v-u)\sin\theta] \\
&= h^2[(2u+h)^2 + 1 + \mu\cos\theta] + \mu h(2u\cos\theta - \sin\theta) \\
&= h^2[(2u+h)^2 + 1 + \mu\cos\theta].
\end{aligned}$$

Cette condition équivaut évidemment à $\mu \geqslant -\dfrac{1}{\cos\theta} = -\sqrt{1+4u^2}$; $r_k(P)$ est donc une demi-droite fermée contenant P, normale à la parabole; l'ordonnée de l'origine de cette demi-droite est

$$a[2u - \sqrt{1+4u^2}\sin\theta] = 0,$$

ce qui est géométriquement évident. Finalement $r_k(P)$ est donc la partie de la normale en P située dans le même demi-plan que P relativement à l'axe de Φ.

b) Il est immédiat d'obtenir alors $r_k(P)$ et $r_k(\Gamma)$, en comparant k à $a\sqrt{1+4u^2}$: $r_k(P)$ est un singleton si $k > a\sqrt{1+4u^2}$, une paire sinon.

C'est notamment toujours une paire si $k \leqslant a$. On en déduit aisément $r_k(\Gamma)$, formée de deux composants connexes pour $k \neq 0$, obtenue en coupant $\Phi_k \cup \Phi_{-k}$ par les demi-plans $y \geqslant 0$ et $y \leqslant 0$ (*fig.* 14).

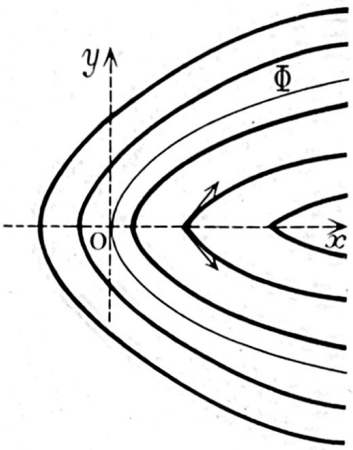

FIG. 14.

TROISIÈME PARTIE.

III. — **0°** Démontrons la propriété admise : considérons l'intersection X de Γ avec la boule fermée $\bar{B}(M, d(M, A))$, où A est un point donné de Γ. X étant compacte, il existe $P \in X$ tel que

$$d(M, P) = \min_{Q \in X} d(M, Q) \leqslant d(M, A).$$

Pour $Q \in \Gamma - X$, on a *a fortiori*, $d(M, Q) \geqslant d(M, A) \geqslant d(M, P)$. Par suite P est bien une projection de M.

III. — **1°** Soit $(P, Q) \in p(M)^2$ et R le milieu de [P, Q], donc élément de Γ. On peut écrire

$$d(M, P)^2 \geqslant d(M, P)^2 - \frac{1}{4} d(P, Q)^2 = d(M, R)^2 \geqslant d(M, P)^2,$$

d'où P = Q.

III. — **2°** *a*) Si $P \in \Gamma$, on a $\mathscr{C}(P, \Gamma) = E_2$ qui est convexe. Soit donc $P \notin \Gamma$, $(U, V) \in \mathscr{C}^2$, $t \in]0, 1[$ et $\mathbf{PW} = t\mathbf{PU} + (1 - t)\mathbf{PV}$; il existe donc $(Q, R) \in \Gamma^2$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$ tels que $\mathbf{PU} = \lambda\mathbf{PQ}$, $\mathbf{PV} = \mu\mathbf{PR}$ d'où

$$\mathbf{PW} = (\lambda t)\mathbf{PQ} + (1 - t)\mu\mathbf{PR}, \qquad \nu = \lambda t + (1 - t)\mu \geqslant 0.$$

Si $\nu \neq 0$, en posant $\tau = \dfrac{t\lambda}{\nu} = 1 - \dfrac{(1 - t)\mu}{\nu} \in [0, 1]$, $\mathbf{PS} = \tau\mathbf{PQ} + (1 - \tau)\mathbf{PR}$, on a $S \in \Gamma$, $\mathbf{PW} = \nu\mathbf{PS}$ et $W \in \mathscr{C}$.

Si $\nu = 0$, c'est que $\lambda = \mu = 0$, d'où $W = U = V = P \in \mathscr{C}$: $\mathscr{C}$ est convexe.

b) Montrons d'abord que si $T = \bar{\mathscr{C}}$, fermeture de $\mathscr{C}$, est égal à E_2, il en est de même de $\mathscr{C}$. En effet tout point M de E_2 appartient à une droite (D) de E_2; tout intervalle ouvert]P, Q[de (D) est l'intérieur du diamètre d'un cercle (C) de E_2; l'intérieur de (C) est coupé par (D) en deux ouverts non vides, contenant chacun un point de $\mathscr{C}$; par convexité, il en résulte que]P, Q[contient un point de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C} \cap (D)$ est dense dans (D); $\mathscr{C} \cap (D)$ étant convexe, on a donc $(D) = \mathscr{C} \cap (D) \subset \mathscr{C}$, d'où $M \in \mathscr{C}$. Supposons donc $T \neq E_2$.

Soit maintenant $t \in]0, 1]$, $Q \in T$, $M \in E_2 - T$, $p(M) = \{P\}$, $\mathbf{MR} = (1 - t)\mathbf{MP} + t\mathbf{MQ}$:

$$0 \leqslant \|\mathbf{MR}\|^2 - \|\mathbf{MP}\|^2 = (\mathbf{PR} \mid \mathbf{MP} + \mathbf{MR}) = t(\mathbf{PQ} \mid t\mathbf{PQ} + 2\mathbf{MP}),$$

d'où $0 \leqslant t\|\mathbf{PQ}\|^2 + 2(\mathbf{MP} \mid \mathbf{PQ})$; en faisant tendre t vers $+0$, il vient pour tout $Q \in T$ et, *a fortiori*, pour tout

$\mathbf{Q} \in \mathscr{C}$, $(\mathbf{MP}|\mathbf{PQ}) \geqslant 0$; comme $M \neq P$, ceci définit bien un demi-plan (fermé). Soit S le sommet de (C) et $\mathbf{PQ} = -\mathbf{PS}$: on a $(S, Q) \in T^2$, d'où

$$0 \leqslant (\mathbf{MP}\,|\,\mathbf{PQ}) = -(\mathbf{MP}\,|\,\mathbf{PS}) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathbf{MP}\,|\,\mathbf{PS}) = 0.$$

REMARQUES.

■ $\mathscr{C}$ n'est pas nécessairement fermé (*exemple :* $\mathscr{C} = \{(x, y)\,|\,y > 0 \text{ ou } (x \geqslant y = 0)\}$).

■ La démonstration ci-dessus est valable pour tout espace de dimension finie, et tout convexe $\mathscr{C}$, non vide et distinct de E_n (par récurrence).

■ Dans le cas particulier de l'énoncé, on peut repérer une génératrice de $\mathscr{C}$ par son angle polaire avec une direction donnée, d'où une démonstration différente de la propriété annoncée.

c) Il faut entendre ici que les demi-plans sont fermés, de frontières les droites (D_1) et (D_2). Supposons que (D_1) et (D_2) aient un point commun P; soit Q un point de l'intersection $\mathscr{C}$ des deux demi-plans; $\mathscr{C}$ est convexe. De plus, pour tout $\lambda \geqslant 0$, le point R défini par $\mathbf{PR} = \lambda\mathbf{PQ}$ appartient à $\mathscr{C}$. On peut prendre pour (Γ) la différence $\mathscr{C} - \{P\}$: alors $\mathscr{C} = \mathscr{C}(P, \Gamma)$.

Il existe des demi-cônes, même fermés, qui ne sont pas intersection de demi-plans fermés (prendre la réunion de deux droites non parallèles).

Mais tout demi-cône fermé est l'intersection de la famille des demi-plans fermés qui le contiennent car, pour tout point M extérieur à $\mathscr{C} = (\Gamma)$, il existe un demi-plan contenant $\mathscr{C}$ et non M, puisque

$$(\mathbf{MP}\,|\,\mathbf{PM}) = -\|\mathbf{MP}\|^2 < 0.$$

III. – 3° L'énoncé est inexact car $P \in (\Gamma) \Rightarrow \mathscr{C}(P, \Gamma) = E_2$. Nous prendrons comme nouvelle définition de $\mathscr{C}(P, \Gamma)$ la réunion des demi-droites formées d'origine P contenant au moins un point de (Γ) *distinct de* P; les résultats du 2° *a*) et *b*) restent valables car $Q \neq P$ et $R \neq P$.

Si $\mathscr{C}(P, \Gamma) = E_2$, sur deux droites (D_1) et (D_2) sécantes en P, il existe

$$(Q_1, R_1) \in [D_1 \cap \Gamma]^2, \qquad (Q_2, R_2) \in [D_2 \cap \Gamma]^2$$

tels que $\{P\} =]Q_1, R_1[\cap]Q_2, R_2[$; P est intérieur au quadrilatère $Q_1Q_2R_1R_2$, donc intérieur à (Γ). Par suite, $\mathscr{C}(P, \Gamma) \neq E_2$. Il existe donc un demi-plan fermé, dont la frontière contient P, contenant $\mathscr{C}(P, \Gamma)$ donc (Γ).

III. – 4° *a*) Soit $M \in r(P) - \{P\}$; $M \in (\Gamma) \Rightarrow P \notin \{M\} = p(M)$, donc $M \notin (\Gamma)$. Le raisonnement du 2°, *b*), valable pour une partie convexe fermée quelconque, montre que la perpendiculaire (D) issue de P à MP est une droite d'appui en P. De plus (Γ) est inclus dans le demi-plan fermé de frontière (D) ne contenant pas M; $r(P)$ est donc inclus dans le cône de sommet P formé des perpendiculaires en P aux droites d'appui passant par P.

Soit réciproquement (D) une telle droite d'appui. Si $(\Gamma) \subset (D)$, toute la perpendiculaire à (D) est incluse dans $r(P)$. Sinon, seule l'une des demi-perpendiculaires est à considérer; elle convient en entier, car

$$Q \in (\Gamma) \Rightarrow \|\mathbf{MQ}\|^2 - \|\mathbf{MP}\|^2 = (\mathbf{PQ}|\mathbf{MQ} + \mathbf{MQ}) = \|\mathbf{PQ}\|^2 + 2(\mathbf{PQ}|\mathbf{MP}) \geqslant 0.$$

Par suite $r(P)$ est un demi-cône de sommet P. Si P n'est pas un cône, c'est une demi-droite ou une droite (*cf.* le I. – 3° *a*)). Ce demi-cône est convexe; en effet $(U, V) \in r(P)^2$ et $\mathbf{MP} = t\mathbf{UP} + (1 - t)\mathbf{VP}$, avec $t \in [0, 1]$ implique, pour tout $Q \in (\Gamma)$,

$$(\mathbf{MP}|\mathbf{PQ}) = t(\mathbf{UP}|\mathbf{PQ}) + (1 - t)(\mathbf{VP}|\mathbf{PQ}) \geqslant 0, \qquad \text{d'où} \qquad \|\mathbf{MQ}\| \geqslant \|\mathbf{MP}\|.$$

Comme plus haut (ceci prouve également que l'ensemble des droites d'appui passant par P est réunion de deux demi-cônes convexes symétriques).

Par ailleurs l'application p est continue; si $P = p(M)$, $P' = p(M')$, on a

$$(\mathbf{MP}\,|\,\mathbf{PP'}) \geqslant 0, \qquad (\mathbf{M'P'}\,|\,\mathbf{P'P}) \geqslant 0$$

d'où

$$\|\mathbf{MM'}\|\,\|\mathbf{PP'}\| \geqslant (\mathbf{MM'}\,|\,\mathbf{PP'}) = (\mathbf{MP}\,|\,\mathbf{PP'}) + \|\mathbf{PP'}\|^2 + (\mathbf{P'M'}\,|\,\mathbf{PP'}) \geqslant \|\mathbf{PP'}\|^2,$$

c'est-à-dire $\|\mathbf{MM'}\| \geqslant \|\mathbf{PP'}\|$, ou enfin $\|r(M)r(M')\| \leqslant \|\mathbf{MM'}\|$.

Par suite $r(P) = p^{-1}(P)$ est fermé : $r(P)$ est un demi-cône convexe et fermé.

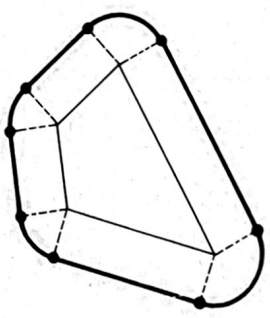

FIG. 15.

L'intersection de $r(P)$ avec le cercle $C(P, 1)$ est fermée. Si $(\Gamma) \neq \{P\}$, $r(P)$ est distinct de E_2 ; en prenant comme origine des abscisses curvilignes sur ce cercle un point extérieur à $r(P)$, on voit que $r(P) \cap C(P, 1)$ est un arc fermé, ce qui détermine la forme de $r(P)$. Cet arc ne peut dépasser un demi-cercle, sans être C entier, à cause de la convexité de $r(P)$.

b) Montrons que, (Γ) étant fermée, la k-sphère est la réunion des $r_k(P)$ qui se déduisent immédiatement du *a*). Il suffit de montrer que tout point de la k-sphère appartient à l'un des $r_k(P)$; nous avons prouvé l'existence de la projection de ce point au début du III : ceci démontre donc bien la propriété annoncée.

La figure 15 donne un exemple d'une telle k-sphère.

ÉCOLES NORMALES SUPÉRIEURES DE GARÇONS ET DE JEUNES FILLES

Concours de 1978.

Groupe A.

Composition de physique.

6207. Énoncé résumé : **Phénomènes non linéaires en mécanique et en optique des milieux matériels.**

(Voir l'énoncé complet dans la *Revue*, n° 1, page 19.)

Première partie.

I. – 1° *a*) L'énergie potentielle d'un ressort de raideur k, allongé de Δl est $V = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + \text{Cte}$.

Avec $\overline{OM} = x$, la longueur du ressort est $l = \sqrt{h_0^2 + x^2}$, son allongement est $l - l_0$, son énergie potentielle est

$$V(x) = \frac{k}{2}(\sqrt{h_0^2 + x^2} - l_0)^2 + \text{Cte} = \frac{k}{2}(h_0^2 + x^2 + l_0^2 - 2l_0\sqrt{h_0^2 + x^2}) + \text{Cte}.$$

La constante est choisie telle que

$$V(0) = 0 = \frac{k}{2}(h_0^2 + l_0^2 - 2l_0h_0) + \text{Cte},$$

d'où

$$V(x) = \frac{k}{2}(x^2 - 2l_0\sqrt{h_0^2 + x^2} + 2l_0h_0).$$

b) $V(x)$ étant paire en x, elle passe pour $x = 0$ par un extrémum nul.

Avec

$$V'(x) = kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{h_0^2 + x^2}}\right) \quad \text{et} \quad V''(x) = k\left[1 - \frac{l_0h_0^2}{(h_0^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

elle passe par d'autres extrémums pour $x = \pm \sqrt{l_0^2 - h_0^2}$, si ces valeurs existent. En effet la dérivée seconde prend en ces points la valeur $k\left[1 - \frac{h_0^2}{l_0^2}\right]$, non nulle sauf pour $l_0 = h_0$.

$V(x)$ tend vers $+\infty$; quand x tend vers $\pm\infty$. N'ayant pas plus d'un extrémum pour $l_0 \leqslant h_0$, cet extrémum $(0, 0)$ est un minimum. Dans le cas $l_0 = h_0$, il y a contact d'ordre 4 entre la courbe et la tangente Ox.

Ayant trois extrémums pour $l_0 > h_0$, la continuité exige un maximum en $(0, 0)$ et deux minimums symétriques, d'ordonnée

$$V(\pm \sqrt{l_0^2 - h_0^2}) = -\frac{k}{2}(l_0 - h_0)^2.$$